Résolution de l'équation du troisième degré par la méthode de Cardan (1501-1576)

Historiquement, la démarche suivie a été découverte par Tartaglia (1499-1557) mais celui-ci ne voulu pas la dévoiler afin de rester seul capable de résoudre les équations du troisième degré (cela constituait un jeu mathématique de l'époque...) Cardan le persuade de lui révéler sa méthode tout en promettant de ne pas la divulguer. Néanmoins il le fît, ce qui fâcha définitivement les deux hommes...

Soit $a,b,c \in \mathbb{C}^3$. On cherche ici à résoudre l'équation $\mathcal{E} : t^3 + at^2 + bt + c = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{K}$.

1ère étape :

On réalise le changement d'inconnue $t = x - \frac{a}{3}$.

L'équation $\mathcal{E}$ se transforme alors en une équation du type : $x^3 + px + q = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{K}$ où $p,q \in \mathbb{C}$ s'expriment en fonction de a,b,c.

Dans le cas où $p = 0$, on sait résoudre l'équation $x^3 = -q$:

Si $q \in \mathbb{R}$ les solutions sont $\sqrt[3]{-q}, \sqrt[3]{-q}.j$ et $\sqrt[3]{-q}.j^2$.

Si $q \in \mathbb{C}$ on écrit $q = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les solutions sont alors $\sqrt[3]{\rho}e^{i\theta/3}, \sqrt[3]{\rho}e^{i\theta/3}.j$ et $\sqrt[3]{\rho}e^{i\theta/3}.j^2$.

Supposons désormais $p \neq 0$.

2ème étape :

Soit x une solution. On écrit $x = u + v$ avec $u,v \in \mathbb{C}*$ tels que $uv = -\frac{p}{3}$.

Une telle décomposition est assurément possible car tout système somme/produit complexe possède un couple solution.

L'équation $x^3 + px + q = 0$ devient alors $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$ puis, après simplification, $u^3 + v^3 + q = 0$.

3ème étape :

En posant $U = u^3$ et $V = v^3$ on observe que (U,V) est solution du système : $\begin{cases} U + V = -q \\ UV = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$.

On sait résoudre un tel système et ceci permet de déterminer (U,V), en choisissant l'un des deux couples solutions. Ce choix est possible compte tenu de la symétrie existant entre les couples (u,v) et (U,V).

Après résolution de $u^3 = U$ et $v^3 = V$, on obtient 3 valeurs possibles pour u et v soit, a priori, 9 couples (u,v) possibles.

Cependant la relation $uv = -\frac{p}{3}$ permet d'exprimer v en fonction de u et, par suite, seuls 3 des 9 couples (u,v) sont à considérer.

La relation $x = u + v$ permet alors d'exprimer x et ceci conduit alors à 3 solutions possibles.

Résumons : Si x est solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$ alors x est l'une des 3 solutions précédentes.

4ème étape :

Inversement, si x est l'une des trois valeurs précédentes, en remontant le raisonnement, on observe bien que x est solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$. La résolution est achevée.

Concrètement :

Résolvons $t^3 - 3t^2 - 3t - 4 = 0$.

On pose $x = t - 1$ ce qui conduit à $x^3 - 6x - 9 = 0$.

On écrit $x = u + v$ avec $uv = 2$.

On obtient alors $u^3 + v^3 = 9$.

On résout $\begin{cases} U + V = 9 \\ UV = 8 \end{cases}$ on introduisant l'équation $y^2 - 9y + 8 = 0$ de racines 1 et 8.

On prend alors $U = 1, V = 8$ d'où $u = 1, j, j^2$ et $v = 2, 2j, 2j^2$.

La relation $uv = 2$ nous dit que les couples (u,v) à considérer sont $(1,2), (j, 2j^2)$ et $(j^2, 2j)$ et les valeurs correspondantes de x sont $3, j(1+2j), j(j+2)$ puis $t = 4, 1 + j(1+2j)$ ou $t = 1 + j(j+2)$.

Enfin ses valeurs sont bien solutions puisqu'on peut remonter le raisonnement.

Finalement $\mathcal{S} = \{4, 1 + j(1+2j), 1 + j(j+2)\}$.